TD n° 7 : Modèles booléens

Toutes les variables aléatoires (v.a.) des exercices suivants sont définies sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Comme à chaque séance, nous importons les packages suivants :

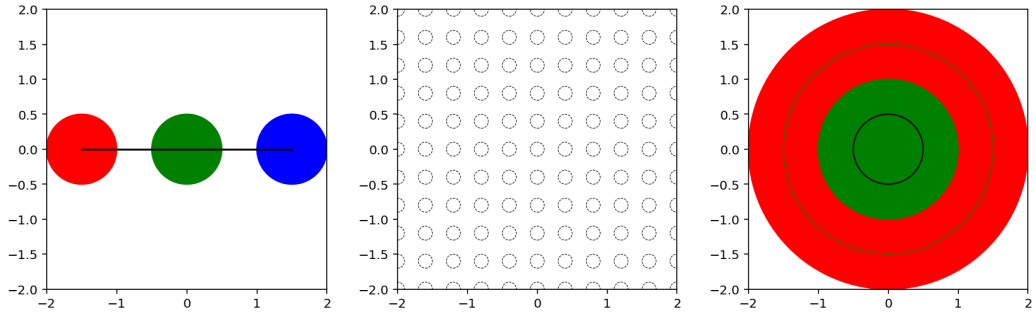
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.stats as st
```

Exercice 1.

1. Exécuter le code suivant, et comprendre ce qu'il fait.

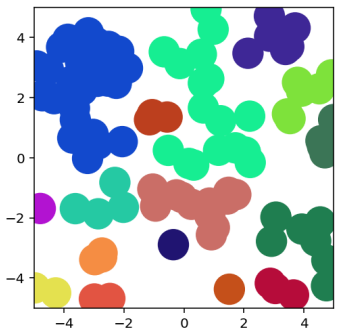
```
fig,ax = plt.subplots()
circle1 = plt.Circle((0,0), .5, fill = True, color='r')
ax.add_patch(circle1)
circle2 = plt.Circle((0,1), 1, fill = False, linestyle = '--', linewidth = .5)
ax.add_patch(circle2)
plt.axis('square')
plt.xlim(-2,2)
plt.ylim(-2,2)
plt.show()
```

2. **(Optionnel)** Entraînez-vous en reproduisant les images suivantes.



Exercice 2.

1. *(Rappel)* Recopier ou reproduire les fonctions `Pi`, `BooleanEdges` et `Plot2DEdges` du TD 4 pour représenter graphiquement le graphe booléen à distance R d'une PPM Π homogène d'intensité λ sur $[-T, T]^2$. On pourra prendre $T = 5$, $\lambda = 1$ et $R = 1$.
2. En vous inspirant de l'exercice 1, implémenter une fonction `PlotDiscs` qui prend en argument un nuage de points et un paramètre r, et dessine un disque plein de rayon r sur chaque point du nuage. Appliquer cette fonction au nuage de la question précédente avec $r = R/2$, et comparer les représentations graphiques.
3. En utilisant la fonction `ConComps` du TD 6, reproduire la question ci-dessus mais en utilisant des **couleurs différentes** pour les disques de chaque composante connexe du graphe booléen associé. Exemple à droite.



Exercice 3. 🖱 **(Modèle booléen, rayons aléatoires)** Dans cet exercice on prendra $T = 5$, $\lambda = 2$ et $\mu = 5$ Soient $N \in \mathbb{N}$, $\mu > 0$. On rappelle que la commande `st.expon.rvs(0,1/mu,size=N)` renvoie un échantillon de N variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{E}(\mu)$

1. Échantillonner une PPM Π_0 homogène d'intensité λ sur $[-T, T]^2$ puis, pour chaque atome X_i de $\Pi_0 = \sum_{i\geq 1} \delta_{X_i}$, simuler une variable aléatoire indépendante R_i de loi $\mathcal{E}(\mu)$. Quelle est la loi de la mesure ponctuelle $\Pi_1 = \sum_{i\geq 1} \delta_{(X_i,R_i)}$?
2. Représenter graphiquement le processus Π dans $[-T, T]^2$ de la manière suivante : pour chaque atome (X_i, R_i) de Π_1, on dessine un disque plein centré en X_i et de rayon R_i.
3. On défini le graphe $G = (V, E)$ à partir de Π_1 de la manière suivante : l'ensemble des sommets est donné par $(X_i)_{i\geq 1}$, et deux sommets X_i, X_j, $i \neq j$ sont reliés par une arête si et seulement si $d(X_i, X_j) \leq R_i + R_j$. Calculer la matrice d'adjacence M du graphe G. On appellera ce graphe le "graphe booléen à distances aléatoires $\mathcal{E}(\mu)$"
4. Déterminer les composantes connexes du graphe G, puis reproduire la représentation de la question 2 en utilisant une couleur différente pour chaque famille de disques telles que leur centre sont dans la même composante connexe de G.
5. Reproduire les questions ci-dessus pour différentes valeurs de μ entre 1 et 5. Que constatez-vous ?

Exercice 4. ✍ **(Modèle booléen, rayons à queue lourde)** On appelle *distribution de Pareto* sur $[1, +\infty[$ de paramètre $\alpha > 0$ la loi d'une variable aléatoire R telle que pour tout $t \geq 1$, on a $\mathbb{P}(R > t) = t^{-\alpha}$.

1. Donner une densité pour la loi de R.
2. Déterminer les valeurs du paramètre $\alpha > 0$ pour lesquelles $\mathbb{E}[R] < +\infty$. Même question pour $\mathbb{E}[R^2] < +\infty$.

On considère Π_0 une PPM sur $\mathbb{R}^2$ d'intensité $\lambda > 0$, et pour chaque atome X_i de Π_0, on tire une variable aléatoire R_i de loi de Pareto de paramètre $\alpha > 0$. On suppose les $(R_i)_{i\in\mathbb{N}}$ indépendantes entre elles et indépendantes de Π_0. On souhaite déterminer la probabilité que l'origine soit recouverte par un disque du modèle booléen associé : c'est-à-dire qu'il existe i tel que $0 \in B(X_i, R_i)$.

3. Quelle est la loi de la mesure ponctuelle $\Pi_1 := \sum_{i\in\mathbb{N}} \delta_{(X_i,R_i)}$?
4. Soit $N = \#\{i \in \mathbb{N} : 0 \in B(X_i, R_i)\}$. Calculer $\mathbb{E}[N]$.
5. Quelle est la loi de N ? En déduire la probabilité que l'origine soit recouverte par un disque en fonction de α.

