TD n° 5 : Révisions

Toutes les variables aléatoires (v.a.) des exercices suivants sont définies sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Comme à chaque séance, nous importons les packages suivants :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.stats as st
```

Exercice 1. 🖱 Soient `lam`, `T` deux flottants positifs fixés. Expliquer ce qui est renvoyé par le code suivant :

```
N = st.poisson.rvs(2*lam*(T**2))
x = st.uniform.rvs(0,T,size = N)
y = st.uniform.rvs(-T,2*T,size = N)
z = np.array([x,y])
z
```

Exercice 2. 🖱 ✍

1. Soient $d \in \mathbb{N}^*$, $\lambda > 0$ et $S_d \coloneqq \{(x_1, \dots, x_d) \in [0,1]^d : \sum_{i=1}^n x_i \leq 1\} \subset \mathbb{R}^d$. Écrire un programme qui renvoie une réalisation d'une mesure ponctuelle de Poisson Π homogène sur S_d d'intensité λ. Représenter graphiquement une réalisation de Π dans le cas $d = 2$ et $\lambda = 100$.
2. Soit $A_1 = \{(x_1, \dots, x_d) \in S_d : x_1 > \max(x_2, \dots, x_d)\}$. Quelle est la loi de $\Pi(A_1)$?

Exercice 3. ✍ On s'intéresse aux nouvelles adhésions à un club de sport. Le club propose deux tarifs, réduit à 30€ et plein à 45€. Les nouveaux adhérents arrivent selon un processus temporel de Poisson. En moyenne le club a un nouvel adhérent au tarif réduit tous les 5 jours, et un nouvel adhérent au tarif plein tous les 10 jours.

1. Définir le processus temporel de Poisson qui représente toutes les dates de nouvelles adhésions au club, tout en précisant s'il s'agit d'adhésions au tarif réduit ou au tarif plein.
2. Combien d'adhésion le club reçoit-il en moyenne sur une période de 100 jours ?
3. Sur une période d'une semaine, le club a reçu 3 nouvelles adhésions. Quelle est la probabilité qu'elles soient toutes au tarif réduit ?
4. Quelle est l'espérance du montant total de cotisations reçues par le club sur une période de 20 jours ?

Exercice 4. 🖱 Pour tout $x \in [-1, 1]$, on pose $f(x) = 1 + \cos(\pi x) \in [0, 2]$. On souhaite simuler une PPM Π sur $[0, 1]$ d'intensité $\mu(\mathrm{d}x) = f(x)\mathrm{d}x$.

— Proposer un algorithme qui simule une réalisation de Π à l'aide d'une discrétisation de l'intervalle $[-1, 1]$, et l'implémenter.

— Proposer un algorithme qui simule une réalisation de Π **sans discrétisation** de l'intervalle $[-1, 1]$, et l'implémenter.

Exercice 5. ✍ Soit $\alpha > 0$ et Π une PPM sur $[1, +\infty[$ d'intensité $\mu(\mathrm{d}x) = x^{-\alpha}\mathrm{d}x$.

1. Montrer que Π est bien définie et localement finie, puis montrer que Π est presque-sûrement finie si et seulement si $\alpha > 1$.
2. On écrit $\Pi = \sum_{i=1}^{N} \delta_{X_i}$ où $N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ et les X_i sont des variables aléatoires. Calculer $\mathbb{E}[\prod_{i=1}^{N} \frac{1}{X_i}]$ en fonction de α. *(Indication : utiliser la formule exponentielle.)*
3. Soit $g(x) = 1/x$ pour tout $x \geq 1$. Déterminer la loi de $g_{\#}\Pi$.

Exercice 6. ✍ Soit $\lambda > 0$ et Π une PPM homogène sur $[0,1]^2$ d'intensité λ. Pour $\pi = \sum_{i=1}^{n} \delta_{z_i}$ une mesure ponctuelle finie sur $[0,1]^2$, où on note $z_i = (x_i, y_i) \in [0,1]^2$, on définit un graphe $G(\pi) = (V, E)$ qui a pour sommets $V = \{z_1, \ldots, z_n\}$, et pour tous $i \neq j$,

$$\{z_i, z_j\} \in E \quad \text{si et seulement si} \quad (x_i < x_j, y_i < y_j) \quad \text{ou} \quad (x_i > x_j, y_i > y_j)$$

Pour tout $1 \leq i \leq n$, on note $\deg(z_i)$ le degré de z_i dans $G(\pi)$, et $D(\pi) \coloneqq \sum_{i=1}^{n} \deg(z_i)$ la somme de tous les degrés des sommets de $G(\pi)$.

1. Pour tout $z = (x, y) \in [0,1]^2$ on pose $B_z \coloneqq ([0, x] \times [0, y]) \bigcup ([x, 1] \times [y, 1])$. Quelle est la loi de $\Pi(B_z)$? En déduire $\mathbb{E}[\Pi(B_z)]$ pour tout $z \in [0,1]^2$.
2. Calculer $\mathbb{E}[D(\Pi)]$, l'espérance de la somme des degrés des sommets de $G(\Pi)$.

Exercice 7. ✍ **(Sommets isolés du graphe booléen 1D)** Soit Π une PPM homogène sur $\mathbb{R}$ d'intensité $\lambda > 0$. Soit $R > 0$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose $B_x = [x - R, x + R] \setminus \{x\}$. On s'intéresse au nombre de points de Π dans $[-T, T]$ qui sont isolés dans le graphe booléen à distance R de Π, noté $M_T(\Pi)$: autrement dit pour X un atome de Π on pose $H(X, \Pi) = \mathbf{1}_{\{\Pi(B_X)=0\}} \mathbf{1}_{\{X \in [-T,T]\}}$, et $M_T(\Pi) = \int_{\mathbb{R}} H(x, \Pi)\Pi(\mathrm{d}x)$.

1. Montrer que $\mathbb{E}[M_T(\Pi)] = 2T\rho$, où ρ est un terme qui ne dépend pas de T qu'on déterminera.
2. Montrer que pour presque tout Π,

$$(M_T(\Pi))^2 = M_T(\Pi) + \sum_{\substack{X,Y \text{ atomes} \\ \text{distincts de } \Pi}} H_2(X, Y, \Pi),$$

   où $H_2(X, Y, \Pi) \coloneqq H(X, \Pi)H(Y, \Pi)$ pour X, Y des atomes distincts de Π.
3. Soient $x, y \in [-T, T]$ tels que $|x - y| > 2R$. Calculer $\mathbb{E}[H_2(x, y, \Pi + \delta_x + \delta_y)]$.
4. Montrer qu'il existe $C > 0$, qui peut dépendre de λ et R, tel que $\mathbb{E}[(M_T(\Pi))^2] \leq (2T\rho)^2 + CT$ pour tout $T > 0$.
5. En déduire pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(|M_T(\Pi) - 2T\rho| \geq T^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right) \xrightarrow[T \to +\infty]{} 0$$