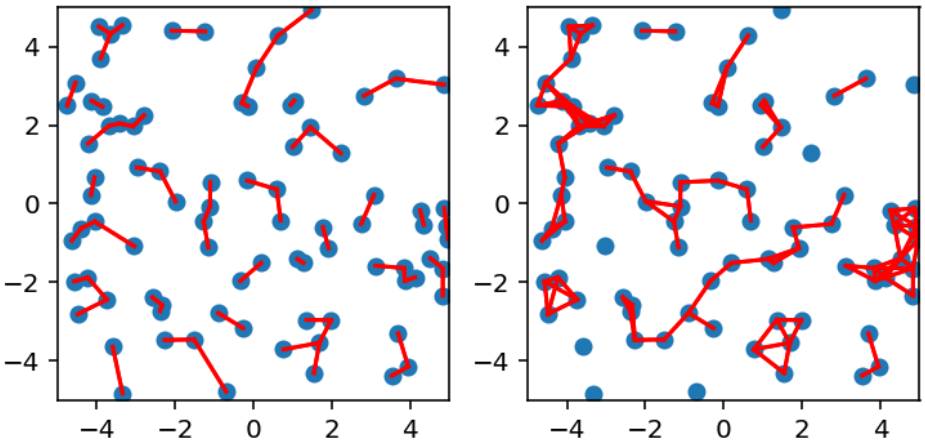
TD n° 4 : Graphes aléatoires

Toutes les variables aléatoires (v.a.) des exercices suivants sont définies sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Comme à chaque séance, nous importons les packages suivants :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.stats as st
```

Attention, dans toutes les questions ci-dessous les mesures ponctuelles dans $\mathbb{R}^2$ seront encodées sous la forme d'objets `np.array` ayant 2 lignes et N colonnes, avec N le nombre de points de la mesure. Pour toutes les applications graphiques, on prendra $T = 5$, $\lambda = 1$, $R = 1$.



Exercice 1. 🖱 **(Préparation)**

1. Implémenter une fonction `Pi` qui prend en argument deux paramètres $\lambda, T > 0$ et renvoie la réalisation d'une PPM homogène sur $[-T, T]^2$ d'intensité λ.
2. Implémenter une fonction `Plot2D` qui prend en argument un nombre $T > 0$ et une mesure ponctuelle sur $[-T, T]^2$, et réalise une représentation graphique de cette mesure.

Exercice 2. 🖱 **(Modèle booléen)** Soit $T > 0$ et $\pi = \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{x_i}$ une mesure ponctuelle simple sur $[-T, T]^2$: $n \in \mathbb{N}$ et $x_0, \dots, x_{n-1} \in [-T, T]^2$ avec $x_i \neq x_j$ pour tous $i \neq j$. Pour tout $R > 0$ on définit $G_{\text{Bool}}(\pi, R) = (V_{\text{Bool}}, E_{\text{Bool}})$ le "graphe booléen" à distance R associé à π comme suit :

— l'ensemble des sommets est $V_{\text{Bool}} = \{x_0, \dots, x_{n-1}\}$,

— pour tous $x_i, x_j \in V_{\text{Bool}}$, $i \neq j$, l'arête $\{x_i, x_j\}$ est dans E_{Bool} si et seulement si $d(x_i, x_j) \leq R$, où $d(\cdot, \cdot)$ désigne la distance euclidienne dans $[-T, T]^2$.

1. Implémenter une fonction `BooleanEdges` qui prend en argument une mesure ponctuelle π dans $[-T, T]^2$ et renvoie la matrice d'adjacence M du graphe booléen associé (i.e. pour $i, j \in V_{\text{Bool}}$, $M_{i,j} = M_{j,i} = 1$ si $\{x_i, x_j\} \in E_{\text{Bool}}$, et $M_{i,j} = 0$ sinon).
2. En s'inspirant de la fonction `Plot2D` définie plus haut, implémenter une fonction `Plot2DEdges` qui prend en argument un nombre $T > 0$, une mesure ponctuelle $\pi = \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{x_i}$ sur $[-T, T]^2$, et une matrice d'adjacence $M \in \{0, 1\}^{n \times n}$, et qui réalise une représentation graphique de π sur laquelle on a tracé les arêtes $\{x_i, x_j\}$ données par la matrice M.
3. En utilisant les questions précédentes, simuler une PPM homogène Π sur $[-T, T]^2$ d'intensité $\lambda > 0$, et représenter graphiquement le graphe booléen à distance R associé.

4. ✍ Pour chacun des énoncés suivants, déterminer s'il est vrai ou faux en donnant une preuve ou un contre-exemple.
   — Presque sûrement, le graphe $G_{\text{Bool}}(\Pi, R)$ ne contient aucun point isolé.
   — Presque sûrement, le graphe $G_{\text{Bool}}(\Pi, R)$ ne contient aucun cycle.

Exercice 3. ✍ **(Formule de Mecke et graphe booléen)** On considère Π une PPM homogène sur $\mathbb{R}^2$ d'intensité $\lambda > 0$, et pour $R > 0$ on construit $G(\Pi, R)$ le graphe booléen à distance R de Π. On note $V = V(\Pi, R)$ ses sommets et $E = E(\Pi, R)$ ses arêtes.

1. On souhaite calculer l'intensité du nombre de points dans $[-T, T]^2$ qui sont isolés dans le graphe $G(\Pi, R)$.
   (a) Pour tout $x \in [-T, T]^2$, soit B_x la boule de rayon R centrée en x. Calculer $\mathbb{P}(\Pi(B_x) = 0)$.
   (b) Pour toute mesure ponctuelle $\pi = \sum_{i \geq 0} \delta_{x_i}$ localement finie sur $\mathbb{R}^2$, on pose pour tout $k \geq 0$,
   $$H(x_k, \pi) \coloneqq \mathbf{1}_{\{\forall i \neq k,\, d(x_i, x_k) > R\}}.$$
   Que vaut $\int_{[-T,T]^2} H(x, \pi)\pi(\mathrm{d}x)$? Répondre qualitativement en fonction de $G(\pi, R)$.
   (c) Soit M_T le nombre de points de Π dans $[-T, T]^2$ qui sont isolés dans le graphe $G(\Pi, R)$. Montrer que $\mathbb{E}[M_T] = 4\lambda T^2 e^{-\pi\lambda R^2}$. En déduire l'intensité du nombre de points isolés.
2. On souhaite calculer le nombre moyen d'arêtes de $G(\Pi, R)$ entièrement dans $[-T, T]^2$.
   (a) Soit $\pi = \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{x_i}$ une mesure ponctuelle finie. Pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$ on écrit $\deg(x_i) \in \mathbb{N}$ le degré de x_i dans le graphe $G(\pi, R)$, et $D = \sum_{i=0}^{n-1} \deg(x_i)$ la somme des degrés. Quel lien y a-t-il entre D et $|E(\pi, R)|$?
   (b) Calculer $\mathbb{E}[D_T(\Pi, R)]$, où $D_T(\pi, R) \coloneqq \int_{[-T,T]^2} \deg(x)\pi(\mathrm{d}x)$. On pourra raisonner comme dans la partie 1.
   (c) En déduire un équivalent de $\mathbb{E}[|E_T(\Pi, R)|]$ quand $T \to +\infty$ avec R fixé, où $E_T(\pi, R) = \{\{x, y\} \in E(\pi, R);\, x, y \in [-T, T]^2\}$.

Exercice 4. 🖱 **(Modèle "plus proche voisin")** Soit $T > 0$ et $\pi = \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{x_i}$ une mesure ponctuelle simple sur $[-T, T]^2$: $n \in \mathbb{N}$ et $x_0, \dots, x_{n-1} \in [-T, T]^2$. On définit $G_{\text{Near}}(\pi) = (V_{\text{Near}}, E_{\text{Near}})$ le "graphe des plus proches voisins" associé à π comme suit :
— l'ensemble des sommets est $V_{\text{Near}} = \{x_0, \dots, x_{n-1}\}$,
— pour tous $x_i, x_j \in V_{\text{Near}}$, $i \neq j$, l'arête $\{x_i, x_j\}$ est dans E_{Near} si et seulement si x_i est le point de π le plus proche de x_j dans $[-T, T]^2$, ou réciproquement.

1. Implémenter une fonction `NNEdges` qui prend en argument une mesure ponctuelle π dans $[-T, T]^2$ et renvoie la matrice d'adjacence du graphe des plus proches voisins associé.
2. Utiliser la fonction `Plot2DEdges` implémentée plus haut pour représenter le graphe des plus proches voisins associé à une réalisation d'une PPM homogène Π sur $[-T, T]^2$ d'intensité $\lambda > 0$.
3. ✍ Pour chacun des énoncés suivants, déterminer s'il est vrai ou faux en donnant une preuve ou un contre-exemple.
   — Presque sûrement, le graphe $G_{\text{Near}}(\Pi)$ ne contient aucun point isolé.
   — Presque sûrement, le graphe $G_{\text{Near}}(\Pi)$ ne contient aucun cycle.
   — Presque sûrement, le graphe $G_{\text{Near}}(\Pi)$ est connexe.