TD n° 3 : Processus temporels de Poisson

Toutes les variables aléatoires (v.a.) des exercices suivants sont définies sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Comme à chaque séance, nous importons les packages suivants :

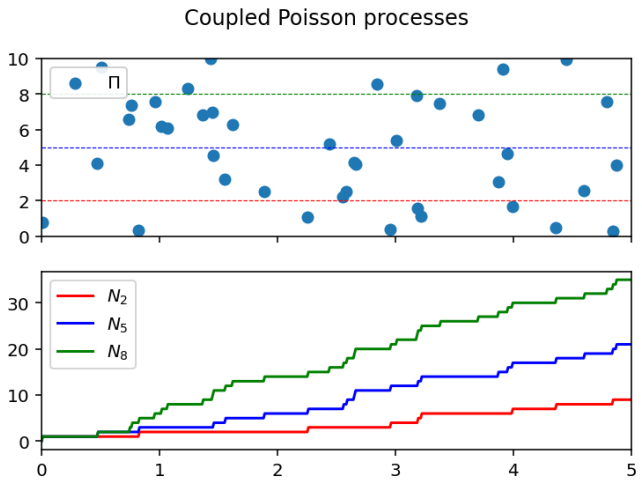
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.stats as st
```

Exercice 1. 🖱

1. Simuler un PPM Π homogène sur $[0,T]$ d'intensité $\lambda > 0$. On prendra $T = 10$, $\lambda = 2$.
2. Représenter graphiquement la fonction $N : [0,T] \to \mathbb{N}$, $N(t) = \Pi([0,t])$.

Exercice 2. 🖱 Soit $T > 0$. Dans cet exercice on souhaite simuler simultanément des PPM sur $[0,T]$ d'intensité $\lambda \,\mathrm{Leb}_{[0,T]}$ pour plusieurs valeurs de $\lambda > 0$.

1. On pose $T = 5$ et $\lambda_{\max} = 10$. Simuler Π une PPM sur $[0,T] \times [0,\lambda_{\max}]$ d'intensité $\mathrm{Leb}_{[0,T]\times[0,\lambda_{\max}]}$. Le représenter graphiquement.
2. On pose π_1 la projection $[0,T] \times [0,\lambda_{\max}] \to [0,T]$. Quelle est la loi de $(\pi_1)_\# \Pi$?
3. Implémenter une fonction `PoissonTemporel` qui prend en argument une réalisation de Π et un nombre $\lambda \in [0,\lambda_{\max}]$ et renvoie une réalisation Π_λ d'un PPM sur $[0,T]$ d'intensité $\lambda \,\mathrm{Leb}_{[0,T]}$.
4. Pour tout $\lambda \in [0,\lambda_{\max}]$, $t \in [0,T]$, on pose $N_\lambda(t) = \Pi_\lambda([0,t])$. Représenter graphiquement la fonction N_λ. On le fera pour les valeurs $\lambda = 2$, $\lambda = 5$ et $\lambda = 8$, en construisants les Π_λ toujours à partir de la même réalisation de Π.
5. Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,\lambda_{\max}]$ tels que $\lambda_1 \leq \lambda_2$. Montrer que $\mathbb{P}(\forall t \in [0,T], N_{\lambda_1}(t) \leq N_{\lambda_2}(t)) = 1$.
6. ⌨ **(Optionnel)** Faire une seule image comprenant deux représentations graphiques : la première est une représentation de Π sur $[0,T] \times [0,\lambda_{\max}]$, sur laquelle on aura dessiné les lignes horizontale de hauteur $\lambda = 2$ en rouge, $\lambda = 5$ en bleu et $\lambda = 8$ en vert ; la seconde est une représentation simultanée des fonctions N_2, N_5 et N_8 sur $[0,T]$ avec les couleurs appropriées. On utilisera la commande `fig, (ax1,ax2) = plt.subplots(...)` avec les arguments appropriés, et on soignera la représentation graphique (légende, titre...). Exemple à droite.



Exercice 3. ✍ On suppose qu'un hôpital reçoit des greffes de foie selon un processus temporel de Poisson d'intensité $\lambda > 0$. L'hôpital a deux patients, Alice et Bob, qui attendent des greffes de foie. S'ils ne reçoivent pas de greffe à temps, Alice décédera au bout d'un temps T_1 de loi exponentielle de paramètre $\mu_1 > 0$, et Bob au bout d'un temps T_2 de loi exponentielle de paramètre $\mu_2 > 0$. Alice étant hospitalisée depuis plus longtemps que Bob, elle est prioritaire pour recevoir une greffe.

1. Définir un processus temporel de Poisson qui permette de représenter toutes les variables aléatoires mentionnées ci-dessus.

2. Quelle est la probabilité qu'Alice reçoive une greffe à temps ?
3. Quelle est la probabilité que Bob reçoive une greffe à temps ?

Exercice 4. 🖱 **(Processus de Hawkes, premiers pas)** L'objectif de cet exercice est de simuler un processus de Hawkes, c'est à dire un processus ponctuel $\Xi = \sum_{i\geq 1} \delta_{T_i}$, $0 < T_1 < T_2 < \ldots$, sur $\mathbb{R}_+$ dont l'intensité à un instant $t > 0$ dépend du passé du processus, et est de la forme

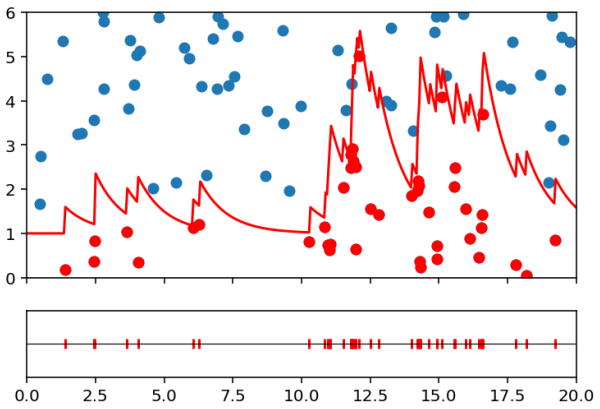
$$\lambda_t := \left(\nu + \sum_{i:\, T_i<t} h(t - T_i)\right)_+ , \quad t \in \mathbb{R}_+ ,$$

où $\nu > 0$ est l'intensité de référence et $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.

1. Si $h(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$, quelle est la loi de Ξ ?
2. Simuler une PPM Π homogène d'intensité 1 sur $[0, T] \times [0, \lambda_{\max}]$, et ordonnez ses points par ordre croissant en abscisse : $\Pi = \sum_{i=1}^N \delta_{(T_i, X_i)}$ avec $0 < T_1 < \ldots < T_N$. La représenter graphiquement. On prendra $T = 20$ et $\lambda_{\max} = 10$, et on pourra utiliser `np.argsort`.
3. Définir une fonction `h1` qui prend en argument un réel x et renvoie $h_1(x) = \frac{1}{2}e^{-x}$.
4. Implémentez l'algorithme suivant : pour ν, h_1 et une réalisation $\Pi = \sum_{i=1}^N \delta_{(T_i, X_i)}$ donnés, on construit un ensemble de points $\Xi \subset [0, T]$ par induction sur $i \in \{1, \ldots, N\}$ comme suit : Ξ est initialement vide, et pour chaque i, on rajoute le point T_i à l'ensemble Ξ si et seulement si

$$X_i \leq \nu + \sum_{\substack{1\leq k<i,\\ T_k\in\Xi}} h_1(T_i - T_k) .$$

5. Représenter graphiquement Ξ. On prendra $\nu = 1$.
6. Reproduire les constructions et représentations graphiques ci-dessus pour les fonctions $h_2(x) = -\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$.
7. ⌨ **(Optionnel)** Représenter une réalisation de Π et Ξ similaire à l'image ci-dessous.



Exercice 5. ✍ **(Paradoxe de l'autobus)** Un arrêt de bus est desservi à des temps donnés par un processus de Poisson homogène d'intensité $\lambda > 0$. Vous arrivez à l'arrêt à un temps t.

1. À votre avis, combien de temps devrez-vous attendre en moyenne avant qu'un bus arrive.
2. Soit $A_t = T_{N_t+1} - t$ le temps d'attente avant l'arrivée du prochain bus, et $B_t = t - T_{N_t}$ le temps écoulé depuis le passage du bus précédent. Quelle est la loi jointe de (A_t, B_t) ? *(Indication : calculer $\mathbb{P}(A_t \geq x, B_t \geq y)$ pour $x, y \geq 0$.)*
3. En déduire que A_t, B_t sont indépendantes. Quelle sont leur lois respectives ?
4. Calculer $\mathbb{E}[A_t]$, et comparer à votre réponse à la question 1.