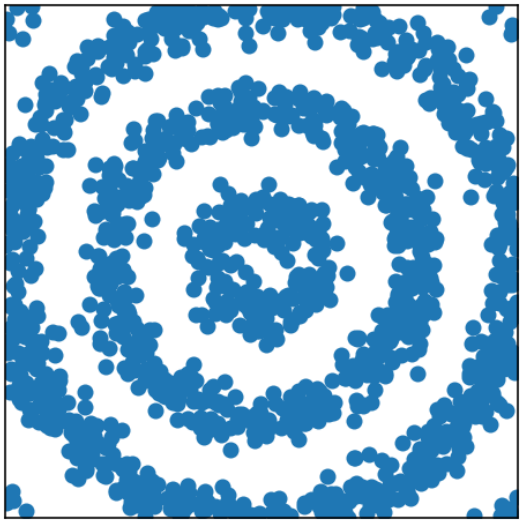
TD n° 2 : Mesures ponctuelles de Poisson inhomogènes

Toutes les variables aléatoires (v.a.) des exercices suivants sont définies sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Comme à chaque séance, nous importons les packages suivants :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.stats as st
```



Exercice 1. 🖱 **(Rappels)** Simuler et représenter graphiquements les PPM suivantes. On pourra prendre $\lambda = 50$ ci-dessous.

1. Une PPM homogène sur $[-1,1]^2$ d'intensité λ (i.e. d'intensité $\lambda \,\mathrm{Leb}_{[-1,1]^2}$).
2. Une PPM homogène sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; |x| + |y| \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ d'intensité λ.

Exercice 2. ✍

1. Soit $\lambda \in [0, +\infty[$ et $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$. Calculer la fonction caractéristique de X, $\phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$, $t \in \mathbb{R}$ *(On prend la convention $X = 0$ p.s. si $\lambda = 0$).*
2. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ une fonction intégrable positive. Pour tout $n \geq 1$ on considère des variables indépendantes $X_{k,n} \sim \mathrm{Poi}\left(\frac{1}{n} f(\frac{k}{n})\right)$, $1 \leq k \leq n$, et on pose $R_n \coloneqq X_{1,n} + \ldots, +X_{n,n}$. Déterminer la limite en loi de R_n quand $n \to +\infty$.
3. Même question pour les variables $R^1_{2n} \coloneqq X_{1,2n} + \ldots, +X_{n,2n}$ et $R^2_{2n} \coloneqq X_{n+1,2n} + \ldots, +X_{2n,2n}$

Exercice 3. 🖱 Soit $T > 0$. On souhaite simuler une réalisation Π d'une PPM sur $[-T,T]$ d'intensité $\mu(dx) = x^2 \mathbf{1}_{[-T,T]}(x)\, dx$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose I_n la subdivision de $[-T,T]$ de pas $\delta = \frac{1}{n}T$.

1. Implémenter les trois algorithmes proposés ci-dessous, qui génèrent des mesures ponctuelles aléatoires qu'on notera $\Xi_{i,n}$, $i \in \{1,2,3\}$, $n \geq 1$.
   (a) Pour tout $t \in I_n$ on simule $X_t \sim \mathrm{Poi}\,(\delta t^2)$, et on pose $\Xi_{1,n} \coloneqq \sum_{t \in I_n} X_t \delta_t$.
   (b) Pour tout $t \in I_n$ on simule $X_t \sim \mathrm{Ber}\,(\delta t^2 \vee 1)$, et on pose $\Xi_{3,n} \coloneqq \sum_{t \in I_n} X_t \delta_t$.
   (c) Pour tout $t \in I_n \setminus \{T\}$ on simule $\widetilde{\Pi}_{n,t} \sim \mathrm{PPM}\left(t^2 \mathrm{Leb}_{[t,t+\delta]}\right)$, et on pose $\Xi_{2,n} \coloneqq \sum_{t \in I_n} \widetilde{\Pi}_{n,t}$.

2. Représenter graphiquement des réalisations des mesures ponctuelles $\Xi_{i,n}$, $i \in \{1,2,3\}$. On prendra $T = 5$ et $n = 100$.
3. *On admet que tous les algorithmes ci-dessus donnent une bonne approximation de* Π*, c'est-à-dire pour tout* i*, on a* $\Xi_{i,n} \xrightarrow[n\to+\infty]{(d)} \Pi$ *dans* $\mathcal{M}([-T,T])$. Discuter des avantages et inconvénients de ces différents algorithmes.

Exercice 4. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ définie par :

$$g(z) \coloneqq 10 \cdot (1 - \cos(\pi \cdot \|z\|))^2$$

1. Définir la fonction `g` dans Python comme ci-dessus. On fera en sorte qu'elle prenne en argument deux flottants x, y, où $(x, y) = z$.
2. Définir une fonction `PPMInhom` qui prend en argument une fonction `f` et un flottant positif `T`, et simule une réalisation d'un PPM d'intensité $\mu(dx) = f(z)\mathbf{1}_{[-T,T]^2}(z)dz$ sur $[-T,T]^2$. L'appliquer à la fonction `g` et à `T=5`, et représenter graphiquement le résultat.

Exercice 5. On considère Π une PPM sur $(\mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}))$ d'intensité $\mu(dx) = e^x dx$.

1. Vérifier que μ est σ-finie, et pour $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, donner la loi de $\Pi([a,b])$.
2. Montrer que $\Pi((-\infty, 0]) < +\infty$ p.s..
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \Pi([n, n+1))$ le nombre de points dans l'intervalle $[n, n+1)$. Calculer $\mathbb{E}[X_n]$ et $\mathrm{Var}(X_n)$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X_n \leq e^n) \leq e^{-n} \frac{(e-1)}{(e-2)^2}.$$

   (On utilisera l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev)
5. En déduire que $X_n = \Pi([n, n+1[)$ tend p.s. vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 6. On souhaite simuler Π une PPM de mesure d'intensité $\mu(dx) = e^x \mathbf{1}_{[-T,T]}(x)dx$. On prendra $T = 5$.

1. En s'inspirant des Exercices 3 et 4, simuler une réalisation de Π et la représenter graphiquement.
2. On considère Π_0 une PPM homogène sur $[e^{-T}, e^T]$ d'intensité 1 (i.e. de mesure d'intensité $\mathrm{Leb}_{[e^{-T},e^T]}$). Simuler une réalisation de Π_0. *(Il n'est pas nécessaire de la représenter graphiquement)*
3. On écrit la réalisation de Π_0 sous la forme $\Pi_0 = \sum_{i=1}^N \delta_{T_i}$. On pose

$$\widetilde{\Pi} \coloneqq \sum_{i=1}^N \delta_{\log(T_i)}.$$

   Représenter $\widetilde{\Pi}$ graphiquement. Que peut-on dire sur la loi de $\widetilde{\Pi}$?

Exercice 7. On considère Π_0 une PPM sur $[0,1]$ d'intensité $\mathrm{Leb}_{[0,1]}$. Pour chacune des applications ϕ ci-dessous, décrire la loi de $\Xi \coloneqq \phi_\# \Pi_0$.

1. $\phi(x) = x^2$.
2. $\phi(x) = 1 - x$.
3. $\phi(x) = -\log(x) \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.
4. $\phi(x) = e^{i\pi x} \in \mathbb{C}$.