# TD n° 1 : Lois de Poisson et mesures ponctuelles de Poisson

Toutes les variables aléatoires (v.a.) des exercices suivants sont définies sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dans toutes les implémentations numériques de ce cours (en Python), nous commencerons par importer les packages suivants :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.stats as st
```

**Attention**, le jour de l'examen vos machines ne seront **pas connectées à internet**. Prenez l'habitude d'utiliser la commande `help(...)` et la documentation de python.

✍ À la main 🖱 Programmation ⌨ Programmation avancée

**Exercice 1.** ✍ Soit $(X_i)_{i\geq 0}$ une suite i.i.d. de loi Poi($\lambda$), $\lambda > 0$, et soit $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ pour tout $n \geq 1$.

1. Quelle est la loi de $S_n$, $n \geq 1$ ?
2. Montrer que $\frac{S_n}{n}$ converge presque sûrement quand $n \to +\infty$ et déterminer sa limite.
3. Déterminer la limite de $\mathbb{P}(S_n \geq \lambda n)$ quand $n \to +\infty$ *(On utilisera le théorème central limite).*

**Exercice 2.** 🖱 On souhaite illustrer les résultats de l'exercice ci-dessus. On pose `n=1000` et `lam=2.0`.

1. Simuler `n` v.a. indépendantes $(X_k)_{1\leq k\leq n}$ de loi de Poisson de paramètre `lam`. Calculer la moyenne et la variance empiriques de cet échantillon. On utilisera la commande `st.poisson.rvs(...)` pour simuler un échantillon de v.a. de Poisson.
2. On pose $S_k = X_1 + \ldots + X_k$ pour tout $k \geq 1$. Faire une représentation graphique de la suite $(\frac{1}{k}S_k)_{1\leq k\leq n}$. Observer et commenter. On utilisera `plt.plot(...)`.
3. On pose à présent `n=200` et `m=1000`. Effectuer `m` simulations indépendantes de la v.a. $\frac{1}{n}S_n$, et les représenter dans un histogramme. Commenter. On pourra utiliser `plt.hist(..., bins = 30)`.

**Exercice 3.** ✍ Soit $\lambda > 0$, $n \geq 1$ et $E = \{1, \ldots, n\}$. On note $\delta$ la mesure de Dirac. Pour chacune des mesures ponctuelles aléatoires suivantes, déterminer s'il s'agit d'une PPM sur $E$ ou non ; et si oui, préciser sa mesure d'intensité.

1. $\Pi = X\delta_1$, où $X \sim \text{Poi}(\lambda)$.
2. $\Pi = \delta_U$, où $U \sim \text{Unif}(E)$.
3. $\Pi = X\delta_U$, où $U \sim \text{Unif}(E)$ et $X \sim \text{Poi}(\lambda)$.
4. $\Pi = \sum_{i=1}^n X_i\,\delta_i$, où les $X_i$, $1 \leq i \leq n$ sont des variables aléatoires indépendantes de lois respectives $X_i \sim \text{Poi}(q_i)$, avec $(q_i)_{1\leq i\leq n} \in ]0, +\infty[^n$.

**Exercice 4.** 🖱 On souhaite simuler $\Pi$ une PPM sur $[0, T]$ d'intensité $\mu = \lambda\,\text{Leb}_{[0,T]}$, pour des $T, \lambda > 0$ fixés.

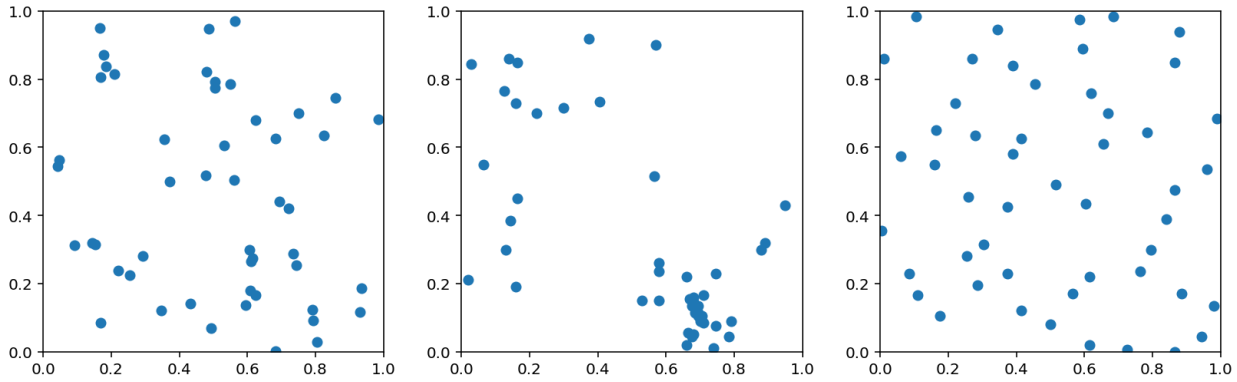
1. À l'aide d'une boucle, simuler une suite de v.a. $(E_1, E_2, \ldots)$ i.i.d. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$, jusqu'à obtenir une v.a. $E_m$ telle que $E_1 + \ldots + E_m \geq T$. À partir de cette suite, obtenir et représenter graphiquement une réalisation de $\Pi$. On prendra $T = 5$ et $\lambda = 2$, et on pourra utiliser la commande `plt.scatter(...)`.

On propose à présent une méthode alternative.

2. Quelle est la loi de $\Pi([0,T])$ ?
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, conditionnellement à $\Pi([0,T]) = n$, décrire la loi de la mesure $\Pi$. Utiliser cette description pour simuler une réalisation de $\Pi$ conditionnée à avoir exactement $n$ points, $n$ fixé.
4. Utiliser les questions précédentes pour écrire une fonction qui prend en arguments $(T, \lambda)$ et renvoie une réalisation de $\Pi$ (non conditionnée). Comparer le temps d'exécution des algorithmes codés dans la question 1 et dans la question 4.

**Exercice 5.** 🖱

1. À votre avis, parmi ces trois images, laquelle a été obtenue en simulant une PPM homogène sur le carré $[0,1]^2$ ?




2. Simuler une v.a. uniforme sur le carré $[0,1]^2$.
3. Écrire une fonction qui simule une PPM sur $[0,1]^2$ d'intensité $\mu = \lambda \,\mathrm{Leb}_{[0,1]^2}$, $\lambda > 0$. La représenter graphiquement, et comparer à la question 1. *(On pourra utiliser la commande* `plt.axis('scaled')` *pour avoir les deux axes à la même échelle).*
4. Écrire une fonction qui simule une PPM sur $B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$, le disque centré en 0 de rayon 1, d'intensité $\mu = \lambda \,\mathrm{Leb}_{B(0,1)}$, $\lambda > 0$. La représenter graphiquement.

**Exercice 6.** 🖱 Soit $T > 0$. Dans cet exercice on souhaite simuler simultanément des PPM sur $[0,T]$ d'intensité $\lambda \,\mathrm{Leb}_{[0,T]}$ pour plusieurs valeurs de $\lambda > 0$.

1. On pose $T = 5$ et $\lambda_{\max} = 10$. Simuler $\Pi$ une PPM sur $[0,T] \times [0, \lambda_{\max}]$ d'intensité $\mathrm{Leb}_{[0,T]\times[0,\lambda_{\max}]}$. Le représenter graphiquement.
2. Soit $\lambda \in [0, \lambda_{\max}]$. Proposer une méthode pour obtenir, à partir d'une réalisation de $\Pi$, une PPM sur $[0,T]$ d'intensité $\lambda \,\mathrm{Leb}_{[0,T]}$. L'implémenter.
3. Soit $\Pi_\lambda$ la PPM sur $[0,T]$ construite ci-dessus. On considère le processus (temporel) de Poisson,

$$N_\lambda : \begin{array}{ccc} [0,T] & \to & \mathbb{N} \\ t & \mapsto & \Pi_\lambda([0,t]) \end{array} .$$

   Représenter graphiquement la fonction $N_\lambda$. On le fera pour les valeurs $\lambda = 2$, $\lambda = 5$ et $\lambda = 8$, en construisants les $\Pi_\lambda$ toujours à partir de la même réalisation de $\Pi$.
4. Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, \lambda_{\max}]$ tels que $\lambda_1 \leq \lambda_2$. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\forall t \in [0,T], N_{\lambda_1}(t) \leq N_{\lambda_2}(t)\right) = 1.$$

5. ⌨ Faire une seule image comprenant deux représentations graphiques : la première est une représentation de $\Pi$ sur $[0,T] \times [0, \lambda_{\max}]$, sur laquelle on aura dessiné les lignes horizontale de hauteur $\lambda = 2$ en rouge, $\lambda = 5$ en bleu et $\lambda = 8$ en vert ; la seconde est une représentation simultanée des fonctions $N_2$, $N_5$ et $N_8$ sur $[0,T]$ avec les couleurs appropriées. On utilisera la commande `fig, (ax1,ax2) = plt.subplots(...)` avec les arguments appropriés, et on soignera la représentation graphique (légende, titre...). Exemple à droite.