Partiel de géométrie stochastique

Jeudi 22 octobre 2026, 14 h–16 h

L'examen (volontairement trop long) se compose de plusieurs exercices théoriques et d'un problème, les exercices de programmation sont à la fin (avec un mémo). Le nombre total de points est largement supérieur à 20. Les questions plus difficiles sont signalées par le symbole $(*)$. La clarté des réponses sera prise en compte dans la notation. Si vous pensez avoir repéré une erreur, indiquez-la sur votre copie.

Exercice 1 — Plus proche atome d'une mesure de Poisson

Soit

$$\Pi = \sum_{i \geq 1} \delta_{Z_i} \sim \mathrm{PPM}(\mathbb{R}^2, \mathrm{Leb}_{\mathbb{R}^2}),$$

où les atomes Z_i sont numérotés par distance croissante à 0. Pour $r > 0$, on considère l'événement

$$\mathcal{E}_r = \{\Pi(B(0,r)) = 0\},$$

où $B(0,r)$ désigne la boule euclidienne de centre 0 et de rayon r.

1) Calculer la probabilité de l'événement $\mathcal{E}_r$.
2) Conditionnellement à $\mathcal{E}_r$, quelle est la loi de la restriction de Π à $\mathbb{R}^2 \setminus B(0,r)$?
3) Conditionnellement à $\mathcal{E}_r$, on note
$$X_r = \inf_{i \geq 1} \|Z_i\|$$
la distance à l'origine de l'atome de Π le plus proche de 0. Déterminer la loi de X_r.
4) En déduire que, conditionnellement à $\mathcal{E}_r$, la variable aléatoire $r(X_r - r)$ converge en loi lorsque r tend vers l'infini, et identifier sa loi limite.

Problème — Sommets isolés du graphe booléen

Soit

$$\Pi = \sum_{i \geq 1} \delta_{Z_i} \sim \mathrm{PPM}(\mathbb{R}^2, \mathrm{Leb}_{\mathbb{R}^2}),$$

où les atomes Z_i sont numérotés par distance croissante à 0. Soit $r_0 > 0$. On construit le graphe booléen dont les sommets sont les atomes $(Z_i)_{i \geq 1}$ de Π, en reliant Z_i et Z_j, pour $i \neq j$, dès que $\|Z_i - Z_j\| < r_0$. Un sommet est dit *isolé* s'il n'est relié à aucun autre atome.

On introduit la mesure ponctuelle des sommets isolés

$$\Pi_{\mathrm{iso}} = \sum_{i \geq 1} \mathbf{1}_{\{\Pi(B(Z_i, r_0)) = 1\}} \, \delta_{Z_i}.$$

Le but du problème est d'établir une loi *forte* des grands nombres pour le nombre de sommets isolés dans de grandes boîtes (nous avons vu la loi faible en cours). On va prouver

$$\frac{\Pi_{\mathrm{iso}}([0,R]^2)}{R^2} \xrightarrow[R \to \infty]{\text{p.s.}} \exp(-\pi r_0^2). \tag{1}$$

1) Montrer que pour toute région borélienne bornée A,

$$\mathbb{E}[\Pi_{\text{iso}}(A)] = \text{Leb}(A)\, \exp(-\pi r_0^2).$$

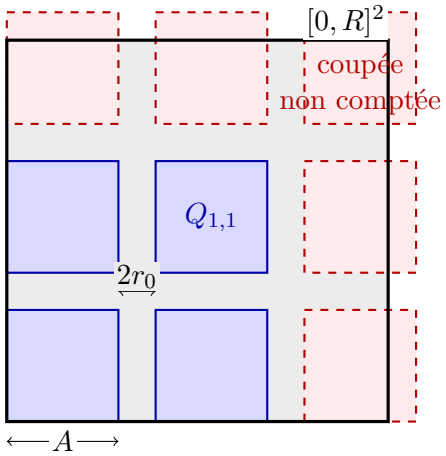
2) Soient $A, B \subset \mathbb{R}^2$ deux régions boréliennes bornées distinctes. Donner un exemple montrant que $\Pi_{\text{iso}}(A)$ et $\Pi_{\text{iso}}(B)$ ne sont pas indépendantes en général. Montrer en revanche qu'elles sont indépendantes dès que

$$\text{dist}(A, B) > 2r_0.$$

Fixons $A > 2r_0$ grand et posons $p = A + 2r_0$. Pour $i, j \in \mathbb{N}$, on définit

$$Q_{i,j} = [ip, ip + A] \times [jp, jp + A].$$

Ces carrés, de côté A, sont séparés horizontalement et verticalement par des couloirs de largeur $2r_0$. Pour $R > 0$, on note m_R le nombre de carrés $Q_{i,j}$ entièrement contenus dans $[0, R]^2$. Les carrés que le bord de $[0, R]^2$ coupe ne sont donc pas comptés.



Les carrés bleus sont comptés. Les carrés rouges en pointillés rencontrent $[0, R]^2$, mais ne sont pas entièrement contenus dedans.

3) Montrer que $m_R \sim \left(\frac{R}{A+2r_0}\right)^2$ lorsque $R \to \infty$.

4) Montrer que $\Pi_{\text{iso}}([0, R]^2)$ est minoré par une somme de m_R variables aléatoires indépendantes ayant toutes la même loi que $\Pi_{\text{iso}}([0, A]^2)$.

5) En déduire que, presque sûrement,

$$\liminf_{R\to\infty} \frac{\Pi_{\text{iso}}([0, R]^2)}{R^2} \geq \frac{A^2 \exp(-\pi r_0^2)}{(A + 2r_0)^2}.$$

Puis montrer que, presque sûrement,

$$\liminf_{R\to\infty} \frac{\Pi_{\text{iso}}([0, R]^2)}{R^2} \geq \exp(-\pi r_0^2).$$

6) (*) En comptant séparément les atomes situés dans les carrés et ceux situés dans les couloirs, établir la borne supérieure correspondante

$$\limsup_{R\to\infty} \frac{\Pi_{\text{iso}}([0, R]^2)}{R^2} \leq \exp(-\pi r_0^2) \qquad \text{presque sûrement.}$$

Conclure en établissant (1).

Exercices de simulation en Python

Programmation. On répondra aux questions de programmation en rédigeant le code sur la copie, en faisant attention à soigner la présentation : inclure les indentations, ajouter des commentaires (précédés par `#`) si utiles ou nécessaires, etc. On supposera qu'on a déjà importé les packages suivants :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.stats as st
```

Memo. On rappelle les commandes usuelles suivantes :

`np.zeros((n,m))`	Crée un array de dimension `(n,m)` rempli de zéros.
`np.shape(x)`	Renvoie les dimensions de l'array `x`.
`np.linspace(a,b,n)`	Crée un array de `n` valeurs régulièrement espacées entre `a` et `b`.
`plt.plot(xvals,yvals)`	Crée une figure en ligne brisée.
`plt.scatter(xvals,yvals)`	Crée une figure en nuage de points.

Exercice 1

1) Pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose $\|x\|_{L_1} = |x_1| + |x_2|$. Rédiger un code qui simule une mesure ponctuelle de Poisson sur $[0, 2]^2$ d'intensité $\mu(\ \mathrm{d}x) = e^{-\|x\|_{L_1}}\ \mathrm{d}x$.
2) Rédiger un code qui génère une représentation graphique de la mesure ponctuelle simulée à la question 1).

Exercice 2

1) Soient `lam`, `T` et `p` trois flottants fixés tels que `lam`, `T` > 0 et $0 <$ `p` < 1. Expliquer ce qui est renvoyé par la fonction `Simu` suivante :

```
def Simu(lam,T,p):
    N = st.poisson.rvs(lam*T)
    x = st.uniform.rvs(0,T,size = N)
    rand = st.uniform.rvs(0,1,size = N)
    y = [0]*N
    for i in range(N):
        if rand[i]<p:
            y[i] = 1
    return np.array([x,y])
```

2) Rédiger un code qui génère une représentation graphique de l'objet renvoyé par la commande `Simu(lam,T,p)`. Si possible on choisira une représentation 1D de l'objet qui utilise deux couleurs différentes selon les points.