TD 7

Exercice 3 $\Pi_0 \sim PPP([-T,T]^2, \lambda Leb)$

$\Pi_0 = \sum_{i \geq 1} \delta_{X_i}$ $\forall i$, $R_i \sim \Sigma(\mu)$ $\mu > 0$

(R_i) indépendants, indép de Π_0

1) $\Pi_1 = \sum_{i \geq 1} \delta_{(X_i, R_i)}$ ← mesure ponctuelle sur $[-T,T]^2 \times \mathbb{R}_+$

$\Pi_1 \sim PPP([-T,T]^2 \times \mathbb{R}_+, \lambda Leb_{[-T,T]^2} \otimes \Sigma(\mu))$

Ex 4 : Loi de Pareto : $\forall t \geq 1$, $\mathbb{P}(R > t) = t^{-a}$ $a > 0$

1) Densité : $f(t) = a t^{-1-a} \mathbb{1}_{\{t \geq 1\}}$

2) $\mathbb{E}[R] = \int_1^\infty r \times a r^{-1-a} dr = a \int_1^\infty r^{-a}$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{si } a \leq 1 \\ a \left[\frac{r^{1-a}}{1-a}\right]_1^\infty = \frac{a}{a-1} & \text{si } a > 1 \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[R^2] = a \int_1^\infty r^{1-a} dr = \begin{cases} +\infty & \text{si } a \leq 2 \\ \frac{a}{a-2} & \text{si } a > 2 \end{cases}$$

3) $\Pi_0 \sim PPP(\mathbb{R}^2, \lambda Leb)$, $R_i \sim Pareto(\alpha)$ $\alpha > 0$

loi de $\Pi_1 = \sum_{i \geq 1} \delta_{(X_i, R_i)}$

$\sim PPP(\mathbb{R}^2 \times [1, +\infty[, \lambda Leb \otimes Pareto)$

$= \lambda \cdot \alpha r^{-1-\alpha} (dx \otimes dr)$

mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2 \times [1, +\infty[$

Obj : $\mathbb{P}(\exists i ; 0 \in B(X_i, R_i))$

4) $\mathbb{E}[\#\{i \geq 1 ; 0 \in B(X_i, R_i)\}]$

$N = \Pi_1(A)$ où $A \in Borel(\mathbb{R}^2 \times [1, +\infty[)$

$\in \mathbb{R}^2 \times [1, +\infty[$

$$A = \{(x, r) ;\ 0 \in B(x, r)\}$$

$$= \{(x, r) \in \mathbb{R}^2 \times [1, +\infty[;\ \|x\| < r\}$$ ouvert dans $\mathbb{R}^2 \times [1, +\infty[$

$$N = \#\{i ;\ (X_i, R_i) \in A\} = \Pi_1(A) \quad , \quad \Pi_1 = \sum \delta_{(X_i, R_i)}$$

$\sim PPP(\lambda \times \alpha r^{-1-\alpha} dx\, dr)$

$\Pi_1(A) \sim Poi(\nu(A))$

où $\nu(A) = \int_{\mathbb{R}^2 \times [1, +\infty[} \mathbb{1}_A(x, r) \times \lambda \alpha r^{-1-\alpha} dx\, dr$

et si $\nu(A) = +\infty$, alors $\Pi_1(A) = +\infty$ p.s.

$$\mathbb{E}[N] = \mathbb{E}[\Pi_1(A)] = \int_{\mathbb{R}^2 \times [1, +\infty[} \mathbb{1}_{\{\|x\| < r\}} \lambda \alpha r^{-1-\alpha} dx\, dr .$$

Fubini

$$= \int_{[1, +\infty[} Leb(B(0, r)) \times \lambda \alpha r^{-1-\alpha} dr$$

$$= \pi \lambda \alpha \int_1^{+\infty} r^2 \times r^{-1-\alpha} dr$$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha \leq 2 \\ \pi \lambda \frac{\alpha}{\alpha - 2} & \text{si } \alpha > 2 \end{cases}$$

5) $N = \Pi_1(A) \sim Poi(\theta)$, et $\mathbb{E}[N] = \theta$

- Si $\alpha > 2$, $N \sim Poi\left(\pi \lambda \frac{\alpha}{\alpha - 2}\right)$ $\left(\mathbb{E}[R^2] < +\infty\right)$

  et $\mathbb{P}(N = 0) = e^{-\pi \lambda \alpha / (\alpha - 2)}$.

- Si $\alpha \leq 2$, alors $N = +\infty$ p.s. $\left(\mathbb{E}[R^2] = +\infty\right)$

  Si $\mathbb{E}[R^2] = +\infty$ alors $\mathbb{P}(\forall y \in \mathbb{R}^2,\ y$ couvert par ∞ boules$) = 1$

Retour 1) : $\mathbb{P}(R > t) = t^{-\alpha}$ $\quad t \geq 1$

$$F(t) = \mathbb{P}(R \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ 1 - t^{-\alpha} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

$t > 1$, $F'(t) = (-\alpha) \times (-t^{-\alpha - 1}) = \alpha t^{-\alpha - 1}$.