Correction Partiel

Exercice 1 $\Pi \sim PPP(\mathbb{R}^2, Leb_{\mathbb{R}^2})$, $\Pi = \sum_{i \geq 1} \delta_{Z_i}$

$\Sigma_n = \{ \Pi(B(0,n)) = 0 \}$

1) $\mathbb{P}(\Sigma_n) = ?$ On sait que $\Pi(B(0,n)) \sim \mathcal{P}(Leb(B(0,n)))$

or $Leb(B(0,n)) = \pi n^2$

donc $\mathbb{P}(\Sigma_n) = e^{-\pi n^2}$

2) Loi de $\Pi|_{\mathbb{R}^2 \setminus B(0,n)}$ conditionnellement à Σ_n ?

$\Pi|_{\mathbb{R}^2 \setminus B(0,n)}$ et $\Pi|_{B(0,n)}$ sont indépendants

donc $\forall A \subset \mathbb{R}^2 \setminus B(0,n)$, mesurable, loi de $\Pi|_{\mathbb{R}^2 \setminus B(0,n)}(A)$ conditionnellement à Σ_n ?

$\forall \ell \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\Pi|_{\mathbb{R}^2 \setminus B(0,n)}(A) = \ell \mid \Sigma_n)$

$$= \frac{\mathbb{P}(\{\Pi|_{\mathbb{R}^2 \setminus B(0,n)}(A) = \ell\} \cap \{\Pi(B(0,n)) = 0\})}{\mathbb{P}(\Sigma_n)}$$

$$= \mathbb{P}(\Pi_{|\mathbb{R}^2 \setminus B(0,n)}(A) = \ell) \times \frac{\mathbb{P}(\Sigma_n)}{\mathbb{P}(\Sigma_n)}$$

$$= \frac{\lambda_A^\ell e^{-\lambda_A}}{\ell!} \quad \text{où } \lambda_A = Leb_{\mathbb{R}^2}(A) \text{ , } A \subset \mathbb{R}^2 \setminus B(0,n)$$

D'où conditionnellement à Σ_n, $\Pi_{|\mathbb{R}^2 \setminus B(0,n)}(A) \sim Poi(Leb|A|)$ vrai pour tout $A \subset \mathbb{R}^2 \setminus B(0,n)$ mesurable

De plus pour A, B disjoint, $A, B \subset \mathbb{R}^2 \setminus B(0,n)$, $\Pi_{|\mathbb{R}^2 \setminus B(0,n)}(A)$ et $\Pi_{|\mathbb{R}^2 \setminus B(0,n)}(B)$ sont indépendants conditionnellement à Σ_n

Donc, conditionnellement à Σ_n, $\Pi_{|\mathbb{R}^2 \setminus B(0,n)} \sim PPP(\mathbb{R}^2 \setminus B(0,n), Leb)$

3) $X_n = \inf_{\lambda \geq 1} \|Z_i\|$, loi de X_n conditionnellement à Σ_n ?

Soit $t \in \mathbb{R}$, $F_{X_n|\Sigma_n}(t) = \mathbb{P}(X_n \leq t \mid \Sigma_n)$

$\mathbb{P}(X_n > t \mid \Sigma_n) = 1$ si $t \leq n$

Si $t > n$, $\mathbb{P}(X_n > t \mid \Sigma_n) = \dfrac{\mathbb{P}(\{X_n > t\} \cap \Sigma_n)}{\mathbb{P}(\Sigma_n)}$

$= \dfrac{\mathbb{P}(\Sigma_t \cap \Sigma_n)}{\mathbb{P}(\Sigma_n)}$ et $\Sigma_n \supset \Sigma_t$

$= \dfrac{\mathbb{P}(\Sigma_t)}{\mathbb{P}(\Sigma_n)} = e^{-\pi(t^2 - n^2)}$

donc $F_{X_n|\Sigma_n}(t) = 1 - \mathbb{P}(X_n > t \mid \Sigma_n)$

$= \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq n \\ 1 - e^{-\pi(t^2-n^2)} & \text{si } t > n \end{cases}$ C'est une fonction continue

Donc, conditionnellement à Σ_n, X_n admet pour densité

$f_{X_n|\Sigma_n}(t) = \mathbb{1}_{\{t > n\}} \times 2\pi t \times e^{-\pi(t^2-n^2)}$

4) $n(X_n - n)$ conditionnellement à Σ_n

Soit $t \in \mathbb{R}$, calculons $\mathbb{P}(n(X_n - n) \leq t \mid \Sigma_n) = F_{n(X_n-n)|\Sigma_n}(t)$

Or $\mathbb{P}(n(X_n - n) \leq t \mid \Sigma_n) = \mathbb{P}(X_n \leq n + \frac{t}{n} \mid \Sigma_n) = (*)$

Si $t \leq 0$, $(*) = 0$

Si $t > 0$, $(*) = 1 - e^{-\pi\left((n+\frac{t}{n})^2 - n^2\right)}$

$= 1 - e^{-\pi\left(2t + \frac{t^2}{n^2}\right)}$

Donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \to \infty} F_{n(X_n-n)|\Sigma_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 1 - e^{-2\pi t} & \text{si } t > 0 \end{cases}$

$\lambda > 0$, Si $Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$, $F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{si } t > 0 \end{cases}$

Donc, conditionnellement à Σ_n, $n(\lambda_n - \lambda) \xrightarrow[n\to\infty]{(\mathcal{L})} \Sigma(Z\pi)$

Problème $\Pi \sim PPP(\mathbb{R}^2, Leb_{\mathbb{R}^2})$, $\Pi = \sum_{i\geq 1} \delta_{Z_i}$

$$\Pi_{iso} = \sum_{i\geq 1} \mathbb{1}_{\{\Pi(B(Z_i, r_0))=1\}} \delta_{Z_i}$$

1) $\mathbb{E}[\Pi_{iso}(A)]$ A mesurable bornée

$$\Pi_{iso}(A) = \sum_{i\geq 1} \mathbb{1}_{\{\Pi(B(Z_i,r_0))=1\}} \mathbb{1}_{\{Z_i \in A\}}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} H(x, \Pi)\, \Pi(dx)$$

où $H(x, \Pi) = \mathbb{1}_{\{\Pi(B(x,r_0))=1\}} \mathbb{1}_{\{x\in A\}}$

x atome de Π

Redo: $\mathbb{E}[\Pi_{iso}(A)] = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{E}[H(x, \Pi + \delta_x)]\, dx$

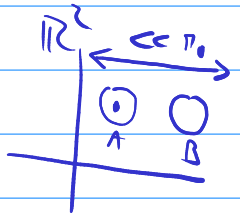
et $\mathbb{E}[H(x, \Pi+\delta_x)] = \mathbb{1}_{\{x\in A\}} \mathbb{P}\left((\Pi+\delta_x)(B(x,r_0)) = 1\right)$ pour $x \in \mathbb{R}^2$

$$= \mathbb{1}_{\{x\in A\}} \mathbb{P}(\Pi(B(x,r_0)) = 0)$$

$$= \mathbb{1}_{\{x\in A\}} \times e^{-\pi r_0^2}$$

En conclusion, $\mathbb{E}[\Pi_{iso}(A)] = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{\{x\in A\}} e^{-\pi r_0^2} dx$

$$\mathbb{E}(\Pi_{iso}(A)) = Leb(A) \times e^{-\pi r_0^2}$$



2) $A, B \subset \mathbb{R}^2$ mesurables disjointes

Soient $A = B(0, \frac{r_0}{8})$ $B = B(\frac{r_0}{2}, \frac{r_0}{8})$

Alors $A \cap B = \emptyset$ mais $\forall x\in A, y\in B$, $d(x,y) < r_0$

donc $\mathbb{P}(\Pi_{iso}(A) > 0, \Pi_{iso}(B) > 0) = 0$

mais $\mathbb{P}(\Pi_{iso}(A) > 0) > 0$, $\mathbb{P}(\Pi_{iso}(B) > 0) > 0$

Soient $A, B \subset \mathbb{R}^2$ mesurables tels que $d(A,B) > 2r_0$

On va vérifier que $\Pi_{i\infty}(A)$ est une fonction mesurable de $\Pi|_{A^{r_0}}$

où $A^{r_0} = \{x \in \mathbb{R}^2 ; d(x,A) < r_0\}$

de même $\Pi_{i\infty}(B)$ est une fonction de $\Pi|_{B^{r_0}}$

et $d(A,B) > 2r_0 \Rightarrow A^{r_0} \cap B^{r_0} = \emptyset \Rightarrow \Pi|_{A^{r_0}} \perp\!\!\!\perp \Pi|_{B^{r_0}}$

$\Rightarrow \Pi_{i\infty}(A) \perp\!\!\!\perp \Pi_{i\infty}(B)$

Vérifions que $\Pi_{i\infty}(A)$ est une fonction mesurable de $\Pi|_{A^{r_0}}$

$$\Pi_{i\infty}(A) = \sum_{i \geq 1} \mathbb{1}_{\{\Pi(B(z_i, r_0)) = 1\}} \mathbb{1}_{\{z_i \in A\}}$$

$$= \sum_{i \geq 1} \mathbb{1}_{\{\Pi|_{A^{r_0}}(B(z_i, r_0)) = 1\}} \mathbb{1}_{\{z_i \in A\}}$$

On peut extraire une sous-suite $(z_{i_m})_{m \geq 1}$ des atomes de Π dans A^{r_0}

alors $\Pi_{i\infty}(A) = \sum_{m \geq 0} \mathbb{1}_{\{\Pi|_{A^{r_0}}(B(\underbrace{z_{i_m}}_{=W_m}, r_0))\}} \mathbb{1}_{\{\underbrace{z_{i_m}}_{=W_m} \in A\}}$

W_m atomes de $\Pi|_{A^{r_0}}$

$\Pi_{i\infty}(A)$ s'écrit comme une fonction de $\Pi|_{A^{r_0}}$

$\left(\Pi_{i\infty}(A) = \int H(x, \Pi|_{A^{r_0}}) \, \Pi|_{A^{r_0}}(dx) \right)$

3) m_R nombre de carrés $Q_{i,j} \subset [0,R]^2$

$$\left\lfloor \frac{R}{A+2r_0} \right\rfloor^2 \leq m_R \leq \left\lceil \frac{R}{A+2r_0} \right\rceil^2$$

$$\left(\frac{R}{A+2r_0} - 1 \right)^2 \leq m_R \leq \left(\frac{R}{A+2r_0} + 1 \right)^2 \quad \text{pour } R > A+2r_0$$

$$\left(1 - \frac{A+2r_0}{R} \right)^2 \leq \frac{m_R}{\left(\frac{R}{A+2r_0} \right)^2} \leq \left(1 + \frac{A+2r_0}{R} \right)^2$$

Donc $m_R \sim \left(\frac{R}{A+2r_0}\right)^2$ quand $R \to \infty$

4) $\Pi_{\text{inf}}([0,R]^2) \geq \Pi_{\text{inf}}\left(\bigsqcup_{(i,j) : Q_{i,j} \subset [0,R]^2} Q_{i,j}\right)$

$= \sum_{(i,j) ; Q_{i,j} \subset [0,R]^2} \Pi_{\text{inf}}(Q_{i,j})$ somme de m_R v.a.

- $\Pi_{\text{inf}}(Q_{i,j}) \overset{(*)}{=} \Pi_{\text{inf}}([0,A]^2)$ car la loi de Π est invariante par translation
- On a vu que si $A, B \subset \mathbb{R}^2$ mesurables vérifient $d(A,B) > 2r_0$ alors $\Pi_{\text{inf}}(A) \perp \Pi_{\text{inf}}(B)$

Par le même argument, on a que pour tous $A_1, \dots, A_n$ tels que $d(A_i, A_j) > 2r_0$ $\forall i,j$, on a $(\Pi_{\text{inf}}(A_i))_{1 \leq i \leq n}$ est une famille indépendante

Donc, par définition des $Q_{i,j}$, ils sont à distance $\geq 2r_0$ donc à deux, donc les $\Pi_{\text{inf}}(Q_{i,j})$ sont indépendants.

5) $\sum_{(i,j),\, Q_{i,j} \subset [0,R]^2} \Pi_{\text{inf}}(Q_{i,j})$ somme de m_R v.a. i.i.d

de plus $\mathbb{E}[\Pi_{\text{inf}}(Q_{i,j})] = \mathbb{E}[\Pi_{\text{inf}}([0,A]^2)]$

$= A^2 \times e^{-\pi r_0^2} < +\infty$

Par la loi forte des grands nombres,

$$\frac{1}{m_R} \sum_{(i,j),\, Q_{i,j} \subset [0,R]^2} \Pi_{\text{inf}}(Q_{i,j}) \xrightarrow[R \to \infty]{\text{p.s.}} A^2 e^{-\pi r_0^2}.$$

De plus, $m_R \sim \left(\frac{R}{A+2r_0}\right)^2$ quand $R \to \infty$ ($\to \frac{1}{(A+2r_0)^2}$)

Donc $\frac{1}{R^2} \sum_{(i,j),\, Q_{i,j} \subset [0,R]^2} \Pi_{\text{inf}}(Q_{i,j}) = \frac{m_R}{R^2} \times \frac{1}{m_R} \sum(\dots)$ ($\to A^2 e^{-\pi r_0^2}$)

$\xrightarrow[R \to \infty]{\text{p.s.}} \frac{A^2}{(A+2r_0)^2} \times e^{-\pi r_0^2}$

De plus $\frac{1}{R^2}\Pi_{iso}([0,R]^2) \geq \frac{1}{R^2}\sum_{(i,j)} (\dots)$ pour tout R

Donc, presque sûrement, $\liminf_{R\to\infty} \frac{1}{R^2}\Pi_{iso}([0,R]^2) \geq \frac{A^2}{(A+2r_0)^2} e^{-\pi r_0^2}$

Soit $\Omega_A = \left\{ \liminf_{R\to\infty} \frac{1}{R^2}\Pi_{iso}([0,R]^2) \geq \frac{A^2}{(A+2r_0)^2} e^{-\pi r_0^2} \right\}$, $A>0$

Alors $\mathbb{P}(\Omega_A) = 1$ pour tout $A>0$

$$1 = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{K\in\mathbb{N}} \Omega_K\Big) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{K\in\mathbb{N}} \left\{ \liminf_{R\to\infty} \frac{1}{R^2}\Pi_{iso}([0,R]^2) \geq \frac{K^2}{(K+2r_0)^2} e^{-\pi r_0^2} \right\}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\liminf_{R\to\infty} \frac{1}{R^2}\Pi_{iso}([0,R]^2) \geq e^{-\pi r_0^2} \right) \quad \square$$

b) Montrons que p.s., $\limsup_{R\to\infty} \frac{1}{R^2}\Pi_{iso}([0,R]^2) \leq e^{-\pi r_0^2}$

$$\Pi_{iso}([0,R]^2) \leq \sum_{(i,j);\, Q_{i,j}\cap[0,R]^2\neq\emptyset} \Pi_{iso}(Q_{i,j})$$

$$+ \underbrace{\sum_{(i,j);\, Q_{i,j}\cap[0,R]^2\neq\emptyset} \Pi_{iso}\left(\begin{array}{|c|}\hline \\ \\ \hline\end{array}\right)}_{\leq \sum \Pi\left(\begin{array}{|c|}\hline \\ \\ \hline\end{array}\right)}$$

$\Pi\left(\begin{array}{|c|}\hline \\ \\ \hline\end{array}\right)$ indépendant pour (i,j)