TD5

Ex 1 : Le code renvoie $\mathcal{Y}$, qui contient un tableau à 2 lignes, N colonnes où $N \sim \text{Poi}(2\lambda T^2)$ et pour tout $i \in \{0, \dots, N-1\}$ alors $(x_i, y_i) \sim \text{Unif}([0,T] \times [-T,T])$

$\mathcal{Y} = [x, y]$

$\mathcal{Y} = [[x_0, x_1, \dots], [y_0, y_1, \dots]]$

Donc $\mathcal{Y}$ contient une réalisation d'une mesure ponctuelle de Poisson

$\begin{cases} (PPP) \text{ d'intensité } \lambda \, Leb_{[0,T] \times [-T,T]} \\ PPP \text{ homogène sur } [0,T] \times [-T,T] \text{ d'intensité } \lambda \\ PPP([0,T] \times [-T,T], \lambda Leb) \end{cases}$

Ex 2 : $S_d = \left\{ (x_1, \dots, x_d) \in [0,1]^d : \sum_{i=1}^{d} x_i \leq 1 \right\}$

Pour simuler une PPP sur S_d, homogène, on simule d'abord une PPP homogène sur $[0,1]^d$, puis on la restreint à $S_d \subset [0,1]^d$

```
# Simulation d'une PPP sur [0,1]^d
# On suppose un flottant positif lam et un entier d donnés
N = st.poisson.rvs(lam)
ppp1 = st.uniform.rvs(0, 1, size=(d, N))

# Maintenant, on restreint ppp1 à S_d
l = []
for i in range(N):
    x = ppp1[:, i]
    if np.sum(x) <= 1:
        l += [x]
# l contient une réalisation du PPP sur S_d d'intensité λ
```

Propriétés des PPP

Si $\Pi \sim PPP(E, \mu)$, si $A \subset E$, alors $\Pi|_A \sim PPP(A, \mu|_A)$

(Rappel : $l = [[x_0, y_0], [x_1, y_1], \dots]$)

On suppose à présent $d=2$, $lam = 100$

```
# Représentation graphique de l
# On crée deux listes pour les valeurs en abscisse et
# en ordonnée
x_vals = []
y_vals = []
for z in l :
    x_vals += [z[0]]
    y_vals += [z[1]]
plt.scatter(x, y)
```

2) $A_1 = \{ x \in S_d,\ x_1 > \max(x_2, \dots, x_d) \}$
Loi de $\Pi(A_1)$?

- Calculer $Leb(A_1)$

Autre méthode : $Leb(S_d) = \frac{1}{d!}$

Remarque : $A_i = \{ x\ ;\ x_i > \max(x_j, j \neq i) \}$
$Leb(A_1) = Leb(A_i)\ \forall i$
(A_i) disjoints, et $Leb(S_d) = Leb(A_1 \cup \dots \cup A_d)$ (*)

Conclusion : $Leb(A_i) = \frac{1}{d} \times \frac{1}{d!}$. D'où $\Pi(A_1) \sim Poi\left(\frac{\lambda}{d \times d!}\right)$

(*) Car $S_d \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_d) \subset \underbrace{\{ x \in [0,1]^d\ ;\ \exists i \neq j, x_i = x_j \}}_{Leb(\ ) = 0}$

Ex 3 :

1) Les arrivées à tarif réduit sont données par un processus (temporel) de Poisson d'intensité $\lambda_R = \frac{1}{5}$
Les arrivées à tarif plein ....., d'intensité $\lambda_P = \frac{1}{10}$

Le processus joint (qui décrit toutes les admissions) est un processus de Poisson sur $\mathbb{R}_+ \times \{"R", "P"\}$
d'intensité $\mu = \text{Leb}_{\mathbb{R}_+} \otimes (\lambda_R \delta_{\{"R"\}} + \lambda_P \delta_{\{"P"\}})$

$$\mu = (\lambda_R + \lambda_P) \text{Leb}_{\mathbb{R}_+} \otimes \left(\frac{\lambda_R}{\lambda_R + \lambda_P} \delta_{\{"R"\}} + \frac{\lambda_P}{\lambda_R + \lambda_P} \delta_{\{"P"\}} \right)$$

2) Les admissions (peu importe le tarif) suivent un processus de Poisson sur $\mathbb{R}_+$ d'intensité $\lambda_R + \lambda_P$
donc le nombre d'admission sur $[0, 100]$
suit une loi $\text{Poi}((\lambda_R + \lambda_P) \times 100)$
donc d'espérance $(\lambda_R + \lambda_P) \times 100 = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{10}\right) \times 100$

$$= \underline{30}$$

3) Chaque admission est au tarif réduit avec probabilité $\frac{\lambda_R}{\lambda_R + \lambda_P}$, au tarif plein avec probabilité $\frac{\lambda_P}{\lambda_R + \lambda_P}$, indépendamment des dates et elles sont indépendantes entre elles

Donc la probabilité que les 3 admissions soient au tarif réduit est $\left(\frac{\lambda_R}{\lambda_R + \lambda_P}\right)^3 = \left(\frac{1/5}{1/5 + 1/10}\right)^3$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \underline{\frac{8}{27}}$$

4) $(30 \times \lambda_R \times 20) + (45 \times \lambda_P \times 20)$

$$= 120 + 90 = \underline{210}$$

$\lambda_R = \frac{1}{5}$

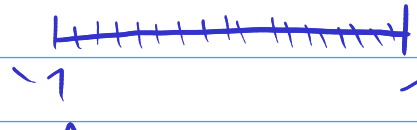
$\lambda_P = \frac{1}{10}$

Ex 4

$f(x) = \frac{1}{2}\cos(\pi x)$ $\quad x \in [-1, 1]$

$\mu(dx) = f(x)\,dx$

1) Avec discrétisation

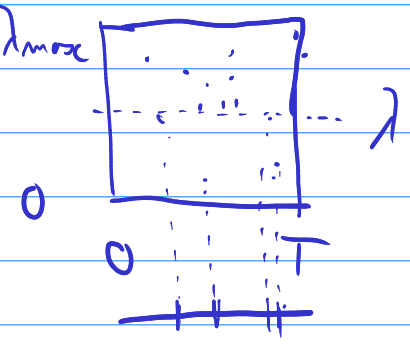


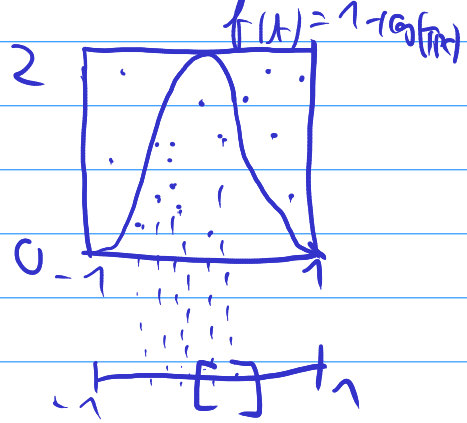
tvals = np.linspace(-1, 1, m)

delta = 2 / (m-1)

Pour chaque $t \in$ tvals on met un point en t avec probabilité $(f(t) \times \text{delta}) \wedge 1$

2) TD3 :





→ PPP($\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$)

Ex 7 $\quad \Pi \sim PPP(\mathbb{R}, \lambda)$

$T, R > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad B_x = [x-R, x+R] \setminus \{x\}$

($\forall \pi$ mesure ponctuelle, x atome de π) $H(x, \pi) = \mathbb{1}_{\{\pi(B_x)=0\}} \mathbb{1}_{\{x \in [-T,T]\}}$

$$\Pi_T(\pi) = \int_{\mathbb{R}} H(x, \pi)\, \pi(dx)$$

(Si $\pi = \sum_{i \geq 1} \delta_{x_i}$, x_i atomes de π : $\Pi_T(\pi) = \sum_{i \geq 1} H(x_i, \pi)$

1) $\mathbb{E}[\Pi_T(\Pi)] = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}[H(x, \Pi + \delta_x)]\, \lambda\, dx$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}[H(x, \Pi + \delta_x)]$

$= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{(\Pi+\delta_x)(B_x)=0\}} \mathbb{1}_{\{x \in [-T,T]\}}]$

$= \mathbb{1}_{\{x \in [-T,T]\}} \mathbb{P}(\underbrace{\Pi(B_x)=0}_{\sim Poi(\lambda \times 2R)})$

$= \mathbb{1}_{\{x \in [-T,T]\}} e^{-2\lambda R}$.

Donc $\mathbb{E}[\Pi_T(\pi)] = \int_{-T}^{T} e^{-2\lambda R} \lambda\, dx = 2T \times \underbrace{\lambda e^{-2\lambda R}}_{p}$

2) $\Pi_T(\Pi)^2 = \left(\sum_{i \geq 1} H(X_i, \Pi)\right)^2$

$= \sum_{i \geq 1} H(X_i, \Pi)^2 + \sum_{\substack{i,j \geq 1 \\ i \neq j}} H(X_i, \Pi) H(X_j, \Pi)$

$= \Pi_T(\Pi) + \sum_{X, Y \text{ atomes } \neq} H_2(X, Y, \Pi)$

3,4) : $\mathbb{E}[\Pi_T(\Pi)^2] \leq (2Tp)^2 + O(T)$